9. Naučno-stručni skup sa međunarodnim učešćem
"QUALITY 2015", Neum, B&H, 10. - 13 juni 2015.

UNAPREĐENJE NASTAVE ANALITIČKE GEOMETRIJE KOD USVAJANJA RAZNIH OBLIKA JEDNAČINE PRAVE PRIMJENOM SOFTVERSKOG PAKETA GEOGEBRA I INTERAKTIVNE SMARTBOARD TABLE

TEACHING IMPROVEMENT OF ANALYTICAL GEOMETRY AT ADOPTING DIFFERENT FORMS OF EQUATION BY USING SOFTWER PACKAGE GEOGEBRA AND INTERACTIVE SMARTBOARD

Naida Bikić, viši asistent
Univerzitet u Zenici, Filozofski fakultet
Zmaja od Bosne 56, Zenica

Milenko Pikula, redovni profesor
Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Filozofski fakultet
Alekse Šantića 1, Pale

REZIME

Korištenjem softverskog paketa GeoGebra i interaktivne SmartBoard table učenici trebaju da se upoznaju sa eksplicitnim, implicitnim i segmentnim oblikom jednačine prave. Položaj prave u koordinatnom sistemu može se utvrditi na razne načine, odnosno pomoću različitih elemenata, a od čega zavisi i oblik odgovarajuće linearne jednačine koja predstavlja jednačinu prave. U eksplicitnom obliku $y = kx + n$ *elementi pomoću kojih je utvrđen položaj prave u koordinatnom sistemu su njen odsječak* n *koji odsijeca na y-osi i ugao α koji prava gradi sa pozitivnim smjerom x-ose. U implicitnom obliku* $Ax + By + C = 0$*, za specijalne vrijednosti parametara A, B i C dobijaju se jednačine pravih koje u pravouglom koordinatnom sistemu zauzimaju specijalne položaje. U segmentnom obliku* $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ *određivanjem segmenata m i n koja prava gradi na koordinatnim osama Ox i Oy određene su i karakteristične tačke M i N na koordinatnim osama, a time i položaj prave u pravouglom koordinatnom sistemu xOy. Za svaku od jednačina pravih autor je izradio aplete u GeoGebri koji mijenjanjem vrijednosti elemenata prave k, n, m A, B ili C u grafičkom prikazu programa prikazuju odgovarajuću pravu , a u algebarskom jednačinu te prave.*

Ključne riječi: koordinatni sistem, eksplicitni, implicitni i segmentni oblik jednačine prave, GeoGebra

SUMMARY

Using the software package GeoGebra and interactive SmartBoard students need to learn about the explicit, implicit and segmental form of the linear equation. The position of equation in the coordinate system can be determined in various ways, using different elements, and of which depends the shape of the corresponding linear equations. In the explicit form y = kx + n elements which determined position in coordinate system are n which cuts the y-axis and the angle α which equation direction makes with *the positive x-axis. The implicit form Ax + By + C = 0, for special values of the parameters A, B and C are obtained by equation that occupy special positions in the Cartesian coordinate system. The segment form* $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ *m i n identifying which law is built on the coordinate axes Ox and Oy are also determined, and characteristic points M and N on the coordinate axes, and thus the position of the coordinate system xOy. For each of the equations authors made in GeoGebra applets that change the value of the real elements of k, n, m A, B or C in the graphic program displaying the appropriate law, and algebraic equation.*

Keywords: coordinate system, explicit, implicit and segmental form of the equation, GeoGebra

1. O GEOGEBRI I INTERAKTIVNOJ TABLI

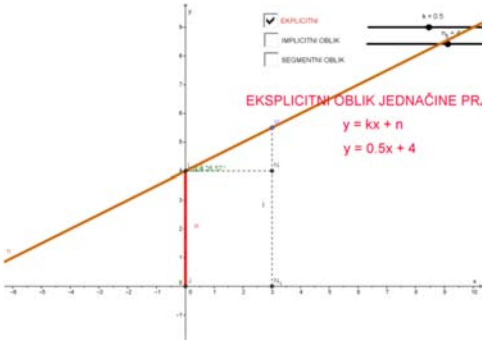
Geogebra je besplatan interaktivni softver koji povezuje dinamičku geometriju, algebru i kalkulus, a njegova osnovna namjena je upotreba u interaktivnoj nastavi matematike. Osnovni koncept GeoGebre jeste spajanje algebre i geometrije, gdje se u isto vrijeme može manipulisati i sa algebarskom jednačinom objekata, kao i sa njegovom geometrijskom interpetacijom. Za ova dva koncepta postoje dvije vrste prikaza – algebarski (Algebra view) u kojem se prikazuju algebarske jednačine i geometrijski (Graphics) za njihove geometrijske interpretacije. Osim ovih prikaza postoje još dva – tabelarni prikaz (Spreadsheet) i prikaz protokola konstrukcije (Construction Protocol) koji u sebi sadrži niz koraka koji su primjenjeni u konstrukciji [2] . SmartBoard tabla je interaktivna tabla pomoću koje učenje na temelju istraživanja postaje dinamičko iskustvo. Primjena ove table pretvara predavačko-receptivnu nastavu u interaktivnu nastavu koja odgovara potrebama savremenog učenika i dovodi do postizanja željenih ishoda učenja. Ovaj vid nastave obezbjeđuje bolju motivisanost učenika i lakše održavanje njihove pažnje. Organizovanjem nastave na ovaj način učenici po tabli mogu pisati specijalnim olovkama ili pritiskom prsta pokretati aplete, a informacije sa table se šalju u računar koji upravlja slikom na tabli. Kombinacija GeoGebre i SmartBoard table omogućava maksimalnu aktivnost učenika u nastavnom procesu i lakše razumijevanje komplikovanijih matematičkih zadataka, a u ovom slučaju upoznavanje različitih oblika jednačine prave.

2. JEDNAČINA PRAVE

Analitička geometrija u ravni je jedno je od područja kojem se u srednjoj školi posvećuje velika pažnja. Međutim prate li časovi analitičke geometrije u našim školama savremene trendove? Savremena nastava matematike sve se više oslanja na upotrebu multimedijalnih sredstava, prije svega računara, kako prilikom obrade novih pojmova, tako i prilikom njihove primjene[4].
Pri izvođenju jednačine prave u ravni, treba voditi računa i o elementima pomoću kojih je određen položaj te prave u pravouglom koordinatnom sistemu. Taj položaj može se utvrditi na razne načine, tj. pomoću raznih elemenata, od čega zavisi i oblik odgovarajuće linearne jednačine koja predstavlja jednačinu prave.
Slijedi prikaz mogućih tehničkih i metodičkih rješenja za sat obrade nastavne jedinice *Eksplicitni, implicitni i segmentni oblik jednačine prave.* Za potrebe ovog rada u GeoGebri je konstruisana dinamička aplikacija jednačinaprave.ggb kojim se opisuje položaj prave u pravouglom koordinatnom sistemu i prikaz njene jednačine u zavisnosti od parametara $k, m, n, A, B \ i \ C$.

2.1. Eksplicitni oblik jednačine prave

U ovom slučaju, elementi pomoću kojih je određen položaj prave u pravouglom koordinatnom sistemu su odsječak $n = KL$ koji ona odsjeca na $y - osi$ i ugao α koji prava gradi sa pozitivnim smjerom x-ose.



Slika1.Eksplicitni oblik jednačine prave

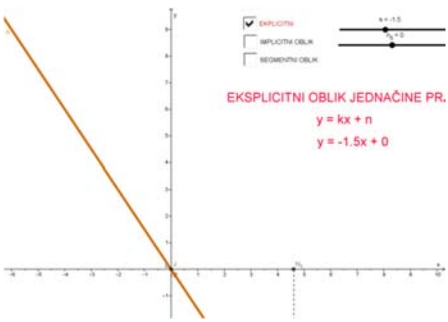
Neka je M(x,y) prozvoljna tačka prave, tada iz pravouglog trougla LMN slijedi $tg\alpha = \frac{MN}{LN} = \frac{y-n}{x}$. Odavde je $y = xtg\alpha + n$, odnosno ako se stavi $tg\alpha = k$, imamo

$$y = kx + n. \qquad (1)$$

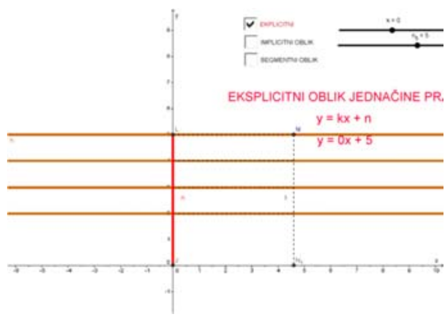
Relacija (1) predstavlja eksplicitni oblik jednačine prave i izražava osobinu koju imaju sve tačke posmatrane prave [3,5]. Pri tome se koeficijent k zove koeficijent pravca, a koeficijent n odsječak na y-osi. Ako koeficijentima $k\ i\ n$ dajemo specijalne vrijednosti, onda iz tog oblika jednačine prave dobijamo jednačine pravih koje zauzimaju specijalne položaje u pravouglom koordinatnom sistemu.

Aplikaciju koju vidimo na slici 1 ima dva klizača, jedan daje vrijednosti za koeficijent pravca, a drugi vrijednost za odsječak na $y - osi$. Učenicima se ponudi da u aplikaciji eksperimentišu aa različitim vrijednostima za parametre $k\ i\ n$, a onda im se zadaje zadatak da klizače postave na određene vrijednosti čime se dobijaju sljedeći karakteristični slučajevi:

a) Ako je $n = 0, k \neq 0$, onda očigledno prava prolazi kroz koordinatni početak, a jednačina prave glasi $y = kx$ (slika 2a).
b) Ako je $n \neq 0, k = 0$, onda je zbog $k = tg\alpha = 0\ i\ \alpha = 0$, pa je prava očigledno u ovom slučaju paralelna x-osi, pa je njena jednačina $y = n$ (slika 2b). Ukoliko je i $n = 0$, imamo $y = 0$, što predstavlja jednačinu $x - ose$.
c) Ako je prava paralelna sa $y - osom$, onda je njena jednačina $x = a$, gdje je a rastojanje te prave od $y - ose$. Ako je $a = 0$, onda će se prava poklopiti sa y-osom, pa zaključujemo da je jednačina $y - ose\ x = 0$.



Slika 2a.Eksplicitni oblik n=0



Slika 2b.Eksplicitni oblik k=0

2.2. Implicitni oblik jednačine prave

Dokažimo da svakoj linearnoj jednačini sa dvije promjenljive

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2)$$

gdje su $A, B\ i\ C$ realni brojevi i bar jedan od $A\ i\ B$ različit od nule odgovara prava. Istinitost ove tvrdnje se dokazuje lako, jer uz pretpostavku da je $B \neq 0$ iz (2) slijedi

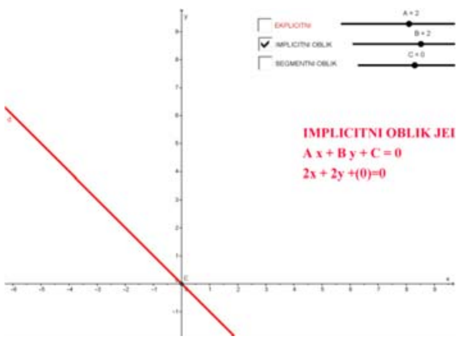
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad (3)$$

što zaista ima formu eksplicitnog oblika jednačine prave koja je izvedena u prethodnoj tački. Upoređivanjem oblika jednačina (1) i (2) uočavamo da je $k = -\frac{A}{B}$, $n = -\frac{C}{B}$. Dakle, pod navedenim uslovom $B \neq 0$, posljednje relacije se koriste za izračunavanje ugaonog koeficijenta k i odsječka koji prava gradi na y-osi. Jednačina (2) naziva se implicitni oblik jednačine prave [3,5].

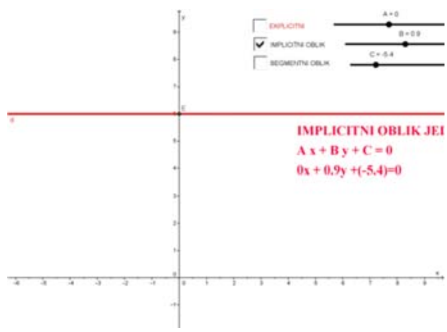
Kada koeficijentima $A, B\ i\ C$ u implicitnom obliku jednačine prave (2) dajemo specijalne vrijednosti, onda dobijamo jednačine pravih koje zauzimaju specijalne položaje u pravouglom koordinatnom sistemu. Učenici korištenjem interaktivne table i dinamičke aplikacije postavljaju klizače za $A, B\ i\ C$ na karakteristične vrijednosti, tako da izvedu sljedeće zaključke:

a) Za $C = 0$, iz (2) imamo jednačinu $Ax + By = 0$, odnosno $y = -\frac{A}{B}x\ (B \neq 0)$, koja predstvavlja jednačinu prave koja prolazi kroz kordinatni početak (Slika 3a).

b) Za $A = 0$, iz (2) slijedi $By + C = 0$, odakle je $y = -\frac{C}{B}$, jer $A = 0$ povlači da u (2), po pretpostavci o $A\ i\ B$ mora biti $B \neq 0$, a to je jednačina prave paralelne sa x-osom na rastojanju $|n|$ od nje, gdje je $n = -\frac{C}{B}$.

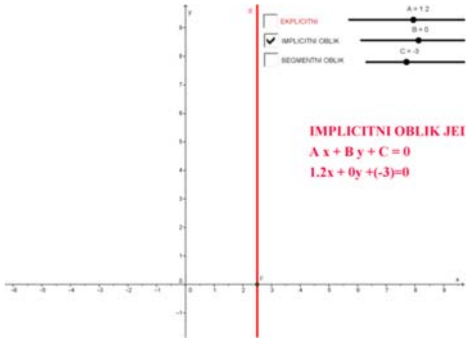


Slika 3a.Implicitni oblik C=0



Slika 3b. Implicitni oblik B=0

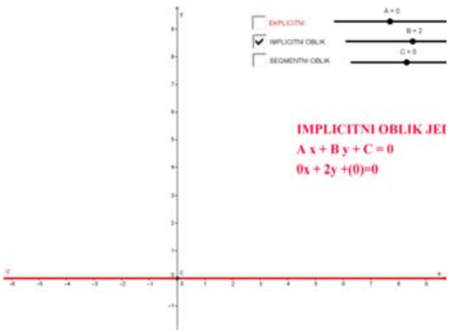
c) Za $B = 0$, jednačina (2) postaje $Ax + C = 0$, odnosno $x = -\frac{C}{A}$, jer $B = 0$ povlači da je $A \neq 0$ po pretpostavci o $A\ i\ B$ u (2), a to je kao što znamo jednačina prave paralelne sa y-osom na rastojanju $|a|$ od nje, gdje je $a = -\frac{C}{A}$ (slika 3c).



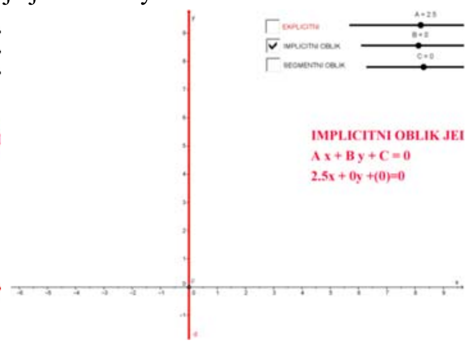
Slika 3c.

d) Za $A = 0 \; i \; C = 0$ iz (2) slijedi $y = 0$, što je jednačina x-ose.

e) Za $B = 0 \; i \; C = 0$ iz (2) slijedi $x = 0$, što je jednačina y-ose.



Slika 3d. Implicitni oblik A=0 i C=0



Slika 3e. Implicitni oblik B=0 i C=0

2.3. Segmentni oblik jednačine prave

Neka prava, zadana u implicitnom obliku $Ax + By + C = 0$ siječe koordinatne ose Ox i Oy kao na slici 4. To znači da su oba koeficijenta $A \; i \; B$ različita od nule. Odsječak koji prava gradi na $x - osi$ označimo sa $OM = m$, a odsječak koji ona gradi na $y - osi$ označimo sa $ON = n$. Prema tome, presječne tačke $M \; i \; N$ date prave sa osama $Ox \; i \; Oy$, date su sa $M(m, 0) \; i \; N(0, n)$. Pošto te tačke leže na datoj pravoj, onda njihove koordinate zadovoljavaju jednačinu prave, pa za tačku M i njene koordinate nakon uvrštavanja u (2) imamo $A \cdot m + B \cdot 0 + C = 0$, odnosno

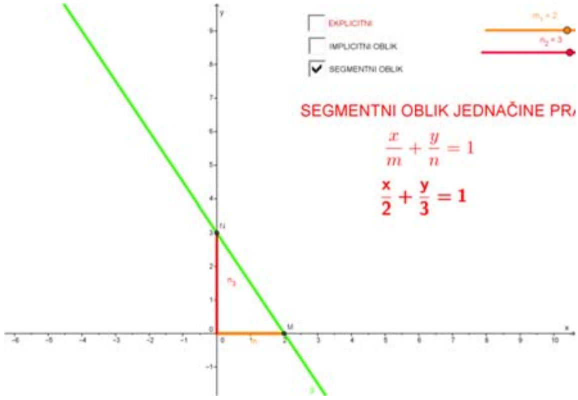
$$m = -\frac{C}{A} \qquad (4).$$

Analogno za tačku N i njene koordinate dobili bismo

$$n = -\frac{C}{B} \qquad (5).$$

Dakle, relacije (4) i (5) možemo koristiti za izračunavanje odsječaka $m \; i \; n$ koje data prava gradi na koordinatnim osama $Ox \; i \; Oy$. To je važan zaključak jer navedene relacije vrlo često koristimo u praksi pri rješavanju brojnih zadataka iz ove oblasti. Određivanjem segmenata $m \; i \; n$ određene su i karakteristične tačke $M \; i \; N$, a time i položaj prave u pravouglom koordinatnom sistemu xOy. U svrhu izvođenja segmentnog oblika jednačine prave iz implicitnog oblika jednačine prave imamo:

$$Ax + By = -C.$$



Slika 4.Segmentni oblik jednačine prave

Dijeljenjem ove jednačine sa $C \neq 0$, dobijamo $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$, koja je ekvivalentna sa jednačinom $\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$. U zadnjoj jednačini prepoznajemo segmente (4) i (5) , pa ona postaje

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \qquad (6).$$

Posljednju jednačinu zovemo segmentni oblik jednačine prave [3,5].

3. ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazana je mogućnost organizovanja istraživački usmjerene nastave uz pomoć dinamičkih apleta koje priprema nastavnik. Radom na apletima učenici eksperimentišu, te samostalno izvode zaključke i na taj način konstruišu vlastito znanje, a pažljivo odabrani zadaci vode ih do konačnog cilja s minimalnim rizikom od neuspjeha [1]. Korištenjem interaktivne table u proučavanju raznih oblika jednačine prave učenici dodirom pomjeraju klizače za navedene parametre i na taj način dolazi do poboljšavanja motivacije i njihove uspješnosti u razumijevanju nastavnog gradiva.

4. LITERATURA

[1] Bjelovanović-Dijanić, Ž.: Računalo u istraživačkom radu učenika u nastavi matematike, Napredak 153, 2, 2012, pp. 203-218.
[2] Drakulić, D.:GeoGebra: Radovi filozofskog fakulteta, 13, 2, Filozofski fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, Pale, 2001, pp. 343-345.
[3] Huskić, A. :Zbirka zadataka za 3. razred srednjih škola, IP Svjetlost, Sarajevo, 2011.
[4] Lajko, E.; Maksić, J.: Proučavanje elipse pomoću GeoGebre, Osječki matematički list, 11, 2011, pp. 39-44.
[5] Softić, S.:Matematika III.razred gimnazije, Federacija BiH, Ministarstvo obrazovanja, nauke, kulture i sporta, Sarajevo, 1996.